Soluciones de algunos ejercicios propuestos

En los siguientes ejercicios te pedía que probaras algunas propiedades muy sencillas de los números. Supongo que hace ya tanto tiempo que conoces estas propiedades de los números que has olvidado cuándo las aprendiste. ¡Y ahora te piden que las *demuestres*! Puedo imaginar tu reacción *¿que demuestre que* $0x = 0$*?, ¡pero si eso es evidente! ¡siempre me han dicho que es así! ¿cómo se puede demostrar tal cosa?*.

Pues bien, si has sabido hacer los ejercicios te felicito; y si los has pensado *suficiente tiempo* pero no has logrado hacerlos, pues... te felicito aún más.

Pienso que muchas veces la dificultad de un ejercicio está en que no sabes qué es exactamente lo que se te pide que hagas; no te dan un marco claro de referencia. En estas situaciones lo más frecuente es *"quedarse colgado"* con la *mente en blanco* sin saber qué hacer. Para evitar ese peligro, en este curso vamos a dar un marco de referencia muy claro que va a consistir en unas propiedades de los números (axiomas, si quieres llamarlas así) que vamos a aceptar como punto de partida para nuestro estudio. Esas propiedades, junto con las reglas de inferencia lógica usuales y con definiciones apropiadas nos permitirán demostrar resultados (teoremas) que podremos usar para seguir avanzando. Simplificando un poco, puede decirse que en matemáticas no hay nada más que axiomas y teoremas (bueno, también hay conjeturas, proposiciones indecidibles...). Todo lo que se demuestra es un teorema; por ejemplo $0x = 0$ es un teorema. Ocurre que el nombre *teorema* se reserva para resultados que se consideran realmente importantes y que ha costado esfuerzo llegar a probarlos. Se usan también los términos: *corolario*, *lema*, *proposición* y otros. Pero la estructura de una *teoría matemática elaborada* se resume en un conjunto de axiomas y de teoremas que se deducen de ellos mediante reglas de inferencia lógica.

Te cuento todo esto para que entiendas lo importante que es saber situarse ante un problema concreto, es decir, enmarcarlo en una teoría apropiada que te proporcione un marco dentro del cual dicho problema tenga sentido. Ahora podrás entender por qué no se te ha ocurrido nada, si este es tu caso, para demostrar que $x0 = 0$: porque no has sabido situar lo que se pide en su contexto adecuado.

1. ¿Sabes probar que $0x = 0$? Inténtalo.

Sol. Una forma de hacerlo es así: $0x = (0+0)x = 0x+0x$, es decir, $0x = 0x+0x$, y sumando ahora el opuesto de $0x$ a ambos lados de esta igualdad obtenemos $0x = 0$.

2. ¿Qué entiendes por $-x$? ¿Es cierto que $-x$ es negativo?

Sol. Esto debe de quedar bien claro: *"$-x$"* significa *"opuesto de x"*, es el número que sumado con x es igual a 0. Deberíamos evitar leer *"$-x$"* como *"menos x"* porque eso es fuente de numerosas confusiones. Recuerda: el símbolo *"$-$"* tiene un significado *algebraico*. El siguiente ejemplo te convencerá si tienes dudas: $-(1,-2,3)=(-1,2,-3)$ es el opuesto del vector $(1,-2,3)$ y no creo que hayas oído hablar de vectores positivos ni negativos ¿verdad?.

3. Escribe con palabras lo que afirma la igualdad $(-x)y=-xy$. ¿Sabes probarla?

Sol. $xy+(-x)y=(x+(-x))y=0y=0$. Lo que prueba que $(-x)y$ es el opuesto de xy. Que es lo que afirma la igualdad del enunciado. Fíjate de que aquí se deduce enseguida que $(-x)(-y)=xy$.

4. Demuestra que si $x\neq 0$ entonces $x^2>0$ (en consecuencia $1>0$).

Sol. Basta observar que $x^2=xx=(-x)(-x)$ y, como $x\neq 0$ debe ocurrir que o bien sea $x>0$, en cuyo caso $x^2=xx>0$, o bien $-x>0$, en cuyo caso $x^2=(-x)(-x)>0$.

5. ¿Sabes por qué no se puede dividir por 0?

Sol. Si se pudiera dividir por 0, es decir, si hubiera un número que fuera el inverso del 0, su producto por 0 habría de ser igual a 1, pero, como hemos visto antes, al multiplicar por 0 el resultado es siempre 0. Conclusión: si se pudiera dividir por cero habría de ser $1=0$, lo cual es falso.

6. Seguro que sabes construir un segmento de longitud $\sqrt{2}$. ¿Y de longitud $\sqrt{3}$?

Sol. Un segmento de longitud $\sqrt{2}$ es, por ejemplo, una diagonal de un cuadrado de lado 1. Ahora es fácil construir sobre esa diagonal un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tenga longitud igual a $\sqrt{3}$.

7. Qué quiere decir que un número no es racional? Demuestra que $\sqrt{2}$ no es racional.

Sol. Que un número no es racional quiere decir que no puede escribirse como cociente de números enteros. Para probar que un número es irracional suele razonarse por contradicción: se supone que el número en cuestión es racional y se llega a una situación contradictoria. Una prueba clásica de que $\sqrt{2}$ es irracional es como sigue. Supongamos que $\sqrt{2}$ fuera racional. Entonces existirán números naturales m y n sin factores comunes, en particular m y n no podrán ser ambos pares, tales que $\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$, esto es, $2n^2=m^2$. La igualdad $2n^2=m^2$ nos dice que m^2 es par lo cual implica que también tiene que serlo m. Así podemos escribir $m=2p$. Sustituyendo en la igualdad anterior y simplificando tenemos que $n^2=2p^2$, y de aquí se sigue, al igual que antes, que n tiene que ser par y ésta es la contradicción anunciada.

No suele ser cosa sencilla probar que un número concreto no es racional. Fíjate que la definición de número irracional como aquél que tiene *infinitas* cifras decimales no periódicas, puede ser útil quizás para ayudar a la intuición, pero no es útil en absoluto para probar que un número dado no es racional.

Si has intentado hacer los ejercicios de desigualdades habrás podido comprobar lo fácil que es equivocarse al trabajar con desigualdades. Yo creo que en el bachillerato no se le da a este tema la importancia que merece. Fíjate que algunos de los conceptos más importantes del Cálculo se definen mediante desigualdades (por ejemplo, la definición de sucesión convergente o de límite de una función en un punto). Por ello, tan importante como saber realizar cálculos más o menos complicados, es aprender a manejar correctamente desigualdades, y la única manera de hacerlo es con la práctica mediante numerosos ejemplos concretos. Por supuesto, siempre *deben respetarse cuidadosamente las reglas generales que gobiernan las desigualdades entre números* y asegurarse de que se usan correctamente. Aparte de tales reglas no hay otros métodos generales que nos digan cómo tenemos que proceder en cada caso particular.

8. Calcula para qué valores de x se verifica que $\dfrac{2x-3}{x+2} < \dfrac{1}{3}$.

Sol. Claro está, $x \neq -2$ (recuerda, no se puede dividir por 0). Como al multiplicar una desigualdad por un número positivo la desigualdad se conserva, deducimos que si $x > -2$, la desigualdad dada equivale a $6x-9 < x+2$, es decir, $x < 11/5$. Luego para $-2 < x < 11/5$ la desigualdad es cierta. Veamos ahora qué pasa si $x < -2$. En tal caso, al multiplicar por $x+2 < 0$ la desigualdad equivale a $6x-9 > x+2$, es decir, $x > 11/5$ condición que no puede darse si $x+2 < 0$. En resumen, la desigualdad es cierta para $-2 < x < 11/5$.

9. Discute la validez de las relaciones:

   a) $|x|-|y| = |x-y|$

   b) $|x-5| < |x+1|$

Sol. Sabemos que el valor absoluto de una suma de dos números es igual a la suma de sus valores absolutos cuando, y sólo cuando, los dos números son ambos positivos o negativos (su producto es positivo).

a) Como $|x| = |(x-y)+y|$, la igualdad del enunciado equivale a que $|(x-y)+y| = |x-y|+|y|$ lo que ocurre si, y sólo si, $(x-y)y \geqslant 0$.

También podemos razonar como sigue: para que $|x|-|y| = |x-y|$ una primera condición evidente es que $|x|-|y| \geqslant 0$, o sea, $|x| \geqslant |y|$. *Supuesto que esta condición se cumple*, entonces los dos lados de la igualdad $|x|-|y|=|x-y|$ son números mayores o iguales que 0, por lo que dicha igualdad será equivalente a $(|x|-|y|)^2=|x-y|^2$, que, simplificando, resulta ser $xy=|xy|$, o sea, $xy\geqslant 0$. Hemos obtenido ahora que la igualdad es válida cuando $|x|\geqslant|y|$ **y** $xy\geqslant 0$. ¿Sabrías justificar que estas dos condiciones juntas equivalen a la condición anterior: $(x-y)y\geqslant 0$?

b) La desigualdad $|x-5|<|x+1|$ equivale a $|x-5|^2<|x+1|^2$, es decir,

$$x^2-10x+25<x^2+2x+1$$

o sea, $24<12x$, esto es, $x>2$.

Puedes hacer un dibujo representando los números en una recta en la que fijas un origen y una unidad: se trata de ver cuándo x está más cerca de 5 que de -1.

10. ¿Es cierto que $0<x+y-xy<1$ siempre que $0<x<1,\ 0<y<1$?

Sol. Hay muchas formas de hacer este ejercicio. Por ejemplo, fíjate que podemos escribir las hipótesis como sigue $0<1-x<1$ y $0<1-y<1$. De aquí se deduce que $0<(1-x)(1-y)<1$ que es la misma desigualdad del enunciado escrita de otra forma.

11. Sabiendo que $a+b>c+d,\ a>b,\ c>d$; ¿se verifica necesariamente alguna de las desigualdades: $a>c,\ a>d,\ b>c$ o $b>d$? Dar una prueba o un contraejemplo en cada caso.

Sol. Que las letras no te despisten: lo que te están diciendo es que si la suma de dos números distintos entre sí es mayor que la suma de otros dos números distintos entre sí, ¿es cierto, por ejemplo, que el mayor del primer par es más grande que el mayor del segundo par? Está claro que no tiene por qué ser así: los otros sumandos pueden compensar la diferencia. Por ejemplo $252+250>500+1$. Ya sabemos que no tiene por qué ser cierto que $a>c$. El mismo ejemplo prueba que tampoco tiene por qué ocurrir que $b>c$. El ejemplo $500+2>251+250$ prueba que tampoco tiene por qué ser $b>d$. Intenta ahora buscar un ejemplo en el que no se cumpla que $a>d$ (pero no le dediques más de cinco minutos). ¿Ya? No lo habrás encontrado porque, si lo piensas un poco, verás que tiene que ser necesariamente $a>d$. Intenta *demostrarlo* (aunque tengas que dedicarle más de cinco minutos).

Lo primero que se le ocurre a uno es escribir $a>(c-b)+d$. Si $c-b$ *fuera siempre positivo* habríamos acabado (*y también habríamos demostrado más de lo que queremos*), pero no tiene por qué ser así, por ejemplo $9+8>2+1$. La *demostración directa* no parece viable. En estos casos tenemos que intentar un *camino indirecto*. Probemos que no puede ocurrir que $a\leqslant d$. Eso es fácil. Fíjate: si fuera $a\leqslant d$, como nos dicen que $b<a$ y $d<c$, también sería $b<d$ y $a<c$; pero entonces $a+b<c+d$ lo que es contrario a la hipótesis hecha. Luego concluimos que $a>d$.

Todo lo anterior es muy fácil y yo me he extendido demasiado. Quizás tú lo veas de forma más sencilla. ¿No parece *evidente* que, en las hipótesis hechas, el *máximo* del primer par (a) tenga que ser mayor que el *mínimo* (d) del segundo?

12. Discutir la validez de las igualdades:

 a) $|x+y+z| = |x+y|+|z|$

 b) $|x-y+z| = |x|-|z-y|$

Sol. a) Por la antes visto, la igualdad $|x+y+z| = |(x+y)+z| = |x+y|+|z|$, se da si, y sólo si, $(x+y)z \geqslant 0$.

b) Esto ya tienes que saberlo hacer. Observa que $|x| = |x+(z-y)+(y-z)|$.

13. Pruébese cada una de las siguientes desigualdades y dígase, en cada caso, cuándo se da la igualdad.

 i) $2xy \leqslant x^2+y^2$.

 ii) $4xy \leqslant (x+y)^2$.

 iii) $x^2+xy+y^2 \geqslant 0$.

 iv) $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geqslant 27abc$ donde $a>0, b>0, c>0$.

 v) $abc \leqslant 1$ donde $a>0, b>0, c>0$ verifican $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) = 8$.

 Sugerencia: para probar i) considérese $(x-y)^2$. Las demás desigualdades pueden deducirse de i).

Sol. Siguiendo la sugerencia, que para eso nos la dan, tenemos que

$$(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \geqslant 0$$

de donde se deduce que $2xy \leqslant x^2+y^2$, y la igualdad ocurre si, y sólo si, $x=y$. Si sumas $2xy$ a ambos lados de la desigualdad $2xy \leqslant x^2+y^2$, obtienes que $4xy \leqslant (x+y)^2$, y la igualdad ocurre si, y sólo si, $x=y$.

Observa que en las desigualdades ya probadas, x, y son dos números arbitrarios. Puedes cambiarlos por sus opuestos o por sus valores absolutos. Si lo haces, obtendrás que $2|x||y| \leqslant x^2+y^2$. De aquí deducimos $x^2+y^2 \geqslant 2|xy| \geqslant |xy| \geqslant -xy$, luego $x^2+y^2+xy \geqslant 0$ y la igualdad se da si, y sólo si, $x=y=0$.

Probaremos ahora la desigualdad $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geqslant 27abc$ donde se supone que $a>0, b>0, c>0$. Lo primero que se observa es la completa *simetría* de la desigualdad propuesta. Puesto que lo único que sabemos de a, b y c es que son positivos, parece razonable pensar que si la desigualdad que nos dan es cierta es porque $x^2+x+1 \geqslant 3x$ cualquiera sea $x>0$, es decir, $x^2+1 \geqslant 2x$, o lo que es igual $(x-1)^2 \geqslant 0$; lo que es cierto (para *todo*número x) y la igualdad se da si, y solo si $x=1$. Sustituyendo ahora en $x^2+x+1 \geqslant 3x$, $x=a$, $x=b$, $x=c$ y *multiplicando* miembro a miembro las tres desigualdades resultantes, obtenemos que

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geqslant 27abc$$

y la igualdad se da si, y sólo si, $a=b=c=1$. ¿Dónde hemos usado que los números a, b y c son positivos?

La última desigualdad propuesta también llama la atención por su *simetría*. Usando otra vez que $0 \leqslant (x-1)^2$, se sigue que $2x \leqslant 1+x^2$. Ahora sustituyes x por a, b y c, multiplicas miembro a miembro las desigualdades obtenidas y has acabado.

Fíjate cuánto partido hemos sacado de la desigualdad elemental $(x-y)^2 \geqslant 0$.

14. Pruébese la desigualdad: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a+b-x} < \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ siempre que $0<a<x<b$.

Sol. En este ejercicio no parece, en principio, cosa fácil deducir la desigualdad pedida de las hipótesis que nos dan. En estos casos puede intentarse *trabajar para atrás*, es decir, ir convirtiendo la desigualdad que nos piden probar en otras *equivalentes a ella* y más sencillas, hasta llegar a una que seamos capaces de deducir de la hipótesis que nos dan. Haciendo las operaciones indicadas, podemos escribir la desigualdad en la forma

$$\frac{a+b}{x(a+b-x)} < \frac{a+b}{ab}$$

y, como los denominadores son positivos, esto es lo mismo que

$$(a+b)ab < (a+b)x(a+b-x)$$

Como $a+b>0$ esta desigualdad equivale a $ab < x(a+b-x)$, es decir:

$$0 < ax+bx-x^2-ab = (x-a)(b-x)$$

Pero esta última desigualdad es consecuencia de que la hipótesis hecha, $0<a<x<b$, la cual implica que $0<x-a$ y $0<b-x$. Y por tanto $(x-a)(b-x)>0$.

Con esto podemos considerar que hemos acabado, pero es una buena costumbre dar ahora la vuelta al razonamiento que hemos seguido, es decir, deshacer el camino recorrido para obtener una prueba directa.

15. Resolver $\dfrac{1}{\log_x(a)} = \dfrac{1}{\log_b(a)}+\dfrac{1}{\log_c(a)}+\dfrac{1}{\log_d(a)}$

Sol. Pongamos $y = \log_x(a)$. Por definición, tenemos que $x^y = a$, de donde se sigue que $y \log x = \log a$. Hemos obtenido así que $\log_x(a) = \dfrac{\log a}{\log x}$. Con ello, la igualdad del enunciado puede escribirse como

$$\frac{\log x}{\log a} = \frac{\log b}{\log a} + \frac{\log c}{\log a} + \frac{\log d}{\log a}$$

esto es $\log x = \log b + \log c + \log d$, o lo que es igual, $\log x = \log(b\,c\,d)$. Como la función logaritmo es inyectiva, deducimos que $x = b\,c\,d$.

16. Probar la igualdad $\operatorname{arc\,cos} x + \operatorname{arc\,sen} x = \dfrac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1,1]$

Sol. Se trata de probar que $\operatorname{arc\,sen} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} x$ para todo $x \in [-1,1]$. Para ello, dado $x \in [-1,1]$, pongamos $y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} x$. Como, por definición, $0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi$, deducimos que $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$. Además

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(\pi/2 - \operatorname{arc\,cos} x) = \operatorname{sen}(\pi/2)\cos(-\operatorname{arc\,cos} x) + \cos(\pi/2)\operatorname{sen}(-\operatorname{arc\,cos} x) =$$

$$= \cos(-\operatorname{arc\,cos} x) = \cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x$$

Hemos probado así que $\operatorname{sen} z = x$, y $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$ lo que, por definición, quiere decir que $z = \operatorname{arc\,sen} x$.

17. Probar que $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sen} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para todo $x \in]-1,1[$.

Sol. Como $\operatorname{tg} z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$, deducimos que $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sen} x) = \dfrac{x}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}$, $\forall\, x \in]-1,1[$ (hay que excluir los puntos ± 1 porque $\operatorname{arc\,sen}(\pm 1) = \pm\pi/2)$. Bastará probar, por tanto, que $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1-x^2}$. Como $\cos^2 z = 1 - \operatorname{sen}^2 z$, deducimos que, $\cos^2(\operatorname{arc\,sen} x) = 1 - x^2$, esto es,

$$|\cos(\operatorname{arc\,sen} x)| = \sqrt{1-x^2}$$

Ahora, como $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc\,sen} x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, se sigue que $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) \geqslant 0$, por lo que

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = |\cos(\operatorname{arc\,sen} x)|$$

y, por tanto, $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1-x^2}$.

18. Dado un número $x \neq 0$, calcúlese un número $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{\operatorname{senh} t} = x$.

Sol. Aquí el dato es el número $x \neq 0$. Puesto que $\operatorname{senh} t = \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}$, tenemos que calcular un número t que verifique la igualdad $2 = x(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})$, esto es, $x\,\mathrm{e}^{2t} - 2\,\mathrm{e}^t - x = 0$. Haciendo $y = \mathrm{e}^t$, tenemos que $x y^2 - 2y - x = 0$, por lo que los dos posibles valores para y son

$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \quad \text{o} \quad \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

Como debe ser $y>0$ (porque el valor de una exponencial siempre es positivo), deducimos que

$$t=\log y=\begin{cases}\log\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right), & \text{si } x>0\\[2ex] \log\left(\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}\right), & \text{si } x<0\end{cases}$$

19. Se quiere amortizar una deuda de 10 millones de pesetas el día 31 de diciembre de 2005. Esta deuda ha sido contraída el día 1 de enero de 2000, y se incrementa cada trimestre al 6 por 100 anual. Para amortizarla se quiere pagar una cantidad fija el último día de cada mes, empezando el 31 de enero de 2000 y terminando el 31 de diciembre de 2005. Estas cantidades producen un interés anual del 3 por 100, que se acumula mensualmente. ¿Qué cantidad hay que abonar cada mes?

Solución Como la deuda se incrementa a un interés compuesto (expresado en tanto por uno) del $0,06/4$ cada trimestre, el 31 de diciembre de 2005 la deuda más los intereses será igual a:

$$10^7\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{24}$$

Llamemos P a la mensualidad que tendremos que pagar al final de cada mes. Dichas mensualidades se capitalizan a interés compuesto del $0,03/12$ cada mes. La primera mensualidad permanece un total de 71 meses y la última, al pagarse el último día del mes no genera ningún interés. La cantidad total que tendremos el 31 de diciembre de 2005 será igual a:

$$P\left[\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{71}+\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{70}+\cdots+\left(1+\frac{0,03}{12}\right)+1\right]=P\left[\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{72}-1\right]\frac{12}{0,03}$$

En consecuencia, deberá ser:

$$P\left[\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{72}-1\right]\frac{12}{0,03}=10^7\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{24}$$

Usando una calculadora se obtiene: $P=181{,}457$ donde hemos redondeado por exceso.

Podemos también hacer el cálculo anterior teniendo en cuenta la aproximación para n grande $\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n\approxeq \mathrm{e}^r$ de la siguiente forma:

$$\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{72}=\left(1+\frac{1}{400}\right)^{72}=\left[\left(1+\frac{1}{400}\right)^{400}\right]^{72/400}\approxeq \mathrm{e}^{72/400}$$

$$\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{24}=\left(1+\frac{3}{200}\right)^{24}=\left[\left(1+\frac{3}{200}\right)^{200}\right]^{24/200}\approxeq \mathrm{e}^{72/200}$$

En consecuencia:

$$P \approxeq 10^5 \frac{\mathrm{e}^{72/200}}{4(\mathrm{e}^{72/400}-1)} = 181{,}695$$

donde hemos redondeado por exceso.

20. Pruébense las igualdades

(a) $\operatorname{arc\,cos} x + \operatorname{arc\,sen} x = \dfrac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1,1]$

(b) $\tan(\operatorname{arc\,sen} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\sec(\operatorname{arc\,sen} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[$

Solución (a) Puede comprobarse esta igualdad de muchas formas. Por ejemplo, si despejamos, podemos escribir la igualdad de la forma:

$$\operatorname{arc\,sen} x = \pi/2 - \operatorname{arc\,cos} x$$

Puesto que $-\pi/2 \leqslant \pi/2 - \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi/2$ *y en el intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$ *la función seno es inyectiva*, la igualdad anterior es equivalente a la siguiente: $x = \operatorname{sen}(\pi/2 - \operatorname{arc\,cos} x)$ la cual es efectivamente cierta porque, para todo $x \in [-1,1]$ es:

$$\operatorname{sen}(\pi/2 - \operatorname{arc\,cos} x) = \operatorname{sen}(\pi/2)\cos(\operatorname{arc\,cos} x) - \cos(\pi/2)\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,cos} x) = x$$

(b) Para todo $x \in]-1,1[$ es:

$$\tan(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x)}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \frac{x}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}$$

Ahora como

$$\cos^2(\operatorname{arc\,sen} x) = 1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x) = 1 - x^2$$

y además $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) > 0$, se sigue que $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1-x^2}$ lo que prueba la igualdad pedida.

Análogamente, se tiene que:

$$\sec(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \text{por lo antes visto} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

21. Pruébese por inducción la igualdad:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx) = \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x$$

Solución La igualdad es evidentemente cierta para $n = 1$. Supongamos que es cierta para un número natural n y probemos que entonces lo es también para $n+1$. Tenemos:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx + \operatorname{sen}(n+1)x) = \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n+1)x$$

En consecuencia, todo se reduce a probar que:

$$\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n+1)x=\operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x$$

Usando que $\operatorname{sen}(2a)=2\operatorname{sen}a\cos a$ y que $\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}b=2\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$, tenemos:

$$\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n+1)x=\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left[2\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\cos\frac{n+1}{2}x\right]=$$

$$=\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\left[\operatorname{sen}\frac{nx}{2}+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{n+1}{2}x\right]=\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\left[\operatorname{sen}\frac{nx}{2}+\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x+\operatorname{sen}\frac{-nx}{2}\right]=$$

$$=\operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x$$

como queríamos probar.

22. Estúdiese la continuidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=E(x^2)$ (parte entera de x^2) para todo $x\in\mathbb{R}$.

Solución Claramente $f=E\circ\varphi$ donde $\varphi(x)=x^2$. Puesto que φ es continua en todo punto y la función parte entera es continua en $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, deducimos por el teorema de composición de funciones continuas, que f es continua en todo punto $a\in\mathbb{R}$ tal que $\varphi(a)=a^2\notin\mathbb{Z}$. Es decir, f es continua en $\mathbb{R}\setminus B$ donde $B=\{\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{-\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$. Los puntos de B requieren un estudio particular pues, *a priori*, no podemos asegurar que f sea discontinua en ellos.

Empecemos estudiando la posible continuidad de f en 0. Es claro que para $-1<x<1$ tenemos que $0\leqslant x^2<1$ por lo que $f(x)=0$ para todo $x\in]-1,1[$. Es decir, la función $f_{|]-1,1[}$ (*restricción de f al intervalo* $]-1,1[$) *es la función constante igual a* 0 y por tanto $f_{|]-1,1[}$ *es continua*. Como el intervalo $]-1,1[$ *es abierto* deducimos, *por el teorema de localización* que f es continua en $]-1,1[$ y, en particular, f *es continua en* 0.

Consideremos ahora un punto de la forma $\sqrt{q}$ donde $q\in\mathbb{N}$ (fijo en lo que sigue). Para todo $x\in]\sqrt{q-1},\sqrt{q}[$ se tiene que $q-1<x^2<q$ por lo que $f(x)=q-1$. Cualquiera sea $\delta>0$, hay puntos $x\in]\sqrt{q}-\delta,\sqrt{q}+\delta[\cap]\sqrt{q-1},\sqrt{q}[$ para los que $|f(\sqrt{q})-f(x)|=|q-(q-1)|=1$, por lo que tomando $\varepsilon_o<1$ deducimos que f no es continua en $\sqrt{q}$.

De forma análoga se prueba que f es discontinua en los puntos de la forma $-\sqrt{q}$ donde $q\in\mathbb{N}$.

23. Probar que si f es continua en a entonces también lo es $|f|$. Dar un ejemplo de función discontinua cuyo valor absoluto es continua.

Solución Todo lo que se necesita es la desigualdad $\big||u|-|v|\big|\leqslant|u-v|$. En nuestro caso tenemos:

$$\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|$$

Supuesto que f es continua en a, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$ y $x \in dom(f)$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ lo que, por la desigualdad anterior, implica que $\big||f(x)| - |f(a)|\big| < \varepsilon$ y, por tanto, $|f|$ es continua en a.
La función dada por $f(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ y $f(x) = -1$ si $x < 0$, es discontinua en 0 pero $|f|$ es continua en 0.

24. Sean A, B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que $a \leqslant b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$. Probar que $\sup A \leqslant \inf B$.

Solución Sea C el conjunto de los mayorantes de A. La hipótesis nos dice que $B \subseteq C$. En consecuencia $\sup(A) = \text{mín}(C)$ es un minorante de B y por tanto, $\sup(A)$ será menor o igual que el máximo minorante de B, es decir, $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

25. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Definamos:

$$A - B = \{a - b : a \in A,\ b \in B\};\ \ AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$$

Pruébese que $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$ y, supuesto que $A \subset \mathbb{R}^+$ y $B \subset \mathbb{R}^+$, probar que $\sup(AB) = \sup A \sup B$.

Solución Sea $\alpha = \sup(A), \beta = \inf(B), \gamma = \sup(A - B)$. Cualesquiera sean $a \in A, b \in B$ se tiene que $a \leqslant \alpha, \beta \leqslant b$. En consecuencia $a - b \leqslant \alpha - \beta$, lo que prueba que $\alpha - \beta$ es un mayorante de $A - B$, y por tanto $\gamma \leqslant \alpha - \beta$.

Probaremos ahora que $\alpha - \beta \leqslant \gamma$. Cualesquiera sean $a \in A, b \in B$ se tiene que $a - b \leqslant \gamma$, es decir, $a \leqslant b + \gamma$. Esta última desigualdad nos dice que, fijado un elemento $b \in B$, el número $b + \gamma$ es un mayorante de A, por lo que $\alpha \leqslant b + \gamma$. Hemos obtenido así que para todo $b \in B$ se verifica que $\alpha - \gamma \leqslant b$, es decir, $\alpha - \gamma$ es un minorante de B, y por tanto $\alpha - \gamma \leqslant \beta$, es decir, $\alpha - \beta \leqslant \gamma$.

Sea $\alpha = \sup(A), \beta = \sup(B), \mu = \sup(AB)$. Cualesquiera sean $a \in A$, $b \in B$ se tiene que $a \leqslant \alpha$, $b \leqslant \beta$. En consecuencia, por ser $a > 0, b > 0$, $ab \leqslant \alpha\beta$, lo que prueba que $\alpha\beta$ es un mayorante de AB y por tanto $\mu \leqslant \alpha\beta$.
Probaremos ahora que $\alpha\beta \leqslant \mu$. Cualesquiera sean $a \in A$, $b \in B$ se tiene que $ab \leqslant \mu$, esto es, $a \leqslant \mu/b$. Esta última desigualdad nos dice que, fijado un elemento $b \in B$, el número μ/b es un mayorante de A, por lo que $\alpha \leqslant \mu/b$. Hemos obtenido así que para todo $b \in B$ se verifica que $b \leqslant \mu/\alpha$, es decir,γ/α es un mayorante de B, y por tanto $\beta \leqslant \mu/\alpha$, es decir, $\alpha\beta \leqslant \mu$.

26. Estúdiese la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

Solución Los ejercicios de este tipo siempre pueden hacerse de varias formas. Una de ellas consiste en usar los resultados que conocemos sobre la continuidad de la suma, producto, cociente y composición de funciones continuas. De esta manera podemos reducir el estudio de la continuidad de la función dada al de otras funciones más sencillas.

En nuestro caso, la función que nos dan es producto de dos funciones, $f(x) = I(x)\varphi(x)$, donde I es la función identidad y $\varphi = E \circ U$ donde E es la función parte entera y $U(x) = 1/x$, $U(0) = 0$ (nótese que como $f(0) = 0$ hay que *definir* $U(0)$ dándole algún valor, no importa cual).

Si $a \neq 0$ es un número real tal que $1/a$ *no* es un número entero, entonces la función U es continua en a, y como E es continua en $U(a)$ (porque la función parte entera es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$), concluimos que la función compuesta $\varphi = E \circ U$ es continua en a y, como la función identidad es continua en todo punto, deducimos que f también es continua en a.

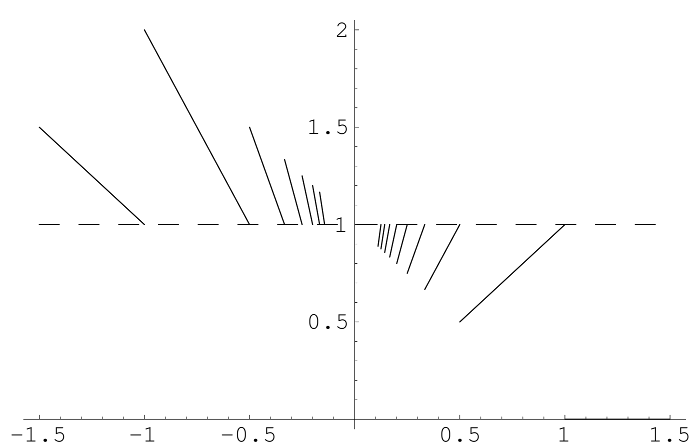
Nótese que no podemos afirmar *a priori* que f sea discontinua en los puntos de la forma $1/n$ donde $n \neq 0$ es un entero. Ello se debe a que *nada puede decirse en general de la composición de una función continua y otra discontinua: unas veces es continua y otras no*.

Estudiemos qué ocurre en un punto de la forma $1/p$ donde $p \geqslant 2$ es un entero (fijo en lo que sigue). Tenemos que $f(1/p) = 1$. Para todo $x \in]1/(p-1), 1/p[$ se tiene que $p - 1 < 1/x < p$, por lo que $E(1/x) = p - 1$ y $f(x) = (p-1)x$, y por tanto

$$f(1/p) - f(x) = 1 - (p-1)x > 1 - (p-1)/p = 1/p.$$

En consecuencia, dado $\varepsilon_o = 1/2p$, *cualquiera sea* $\delta > 0$ hay puntos $x \in]1/(p-1), 1/p[$ cuya distancia al punto $1/p$ es menor que δ, para los cuales *no se verifica* que $|f(1/p) - f(x)| < \varepsilon_o$. Concluimos que f es discontinua en $1/p$. De forma parecida se prueba que f es discontinua en los puntos de la forma $1/q$ donde $q \leqslant -2$ es un entero. Igualmente se prueba que f es discontinua en los puntos 1 y -1.

Queda por ver qué pasa en 0. Si dibujamos con paciencia (con lápiz y regla) la gráfica de f obtenemos esto:



Parece que f es continua en 0. Para *probarlo* hay que probar que $|f(x)-f(0)|=|f(x)-1|$ es tan pequeño como queramos ($<\varepsilon$) siempre que $|x-0|=|x|$ sea suficientemente pequeño ($<\delta$). Lo usual en estos casos es *trabajar para atrás*. Empezamos *acotando* $f(x)-1$. Recordemos que

$$E(1/x)\leqslant 1/x\leqslant E(1/x)+1 \tag{1}$$

Si $x>0$ podemos multiplicar por x dicha desigualdad para obtener que

$$xE(1/x)\leqslant 1\leqslant xE(1/x)+x.$$

Resulta así que para $x>0$ es:

$$0\leqslant 1-xE(1/x)=f(0)-f(x)\leqslant x \tag{2}$$

Si $x<0$ podemos multiplicar por x la desigualdad (1) para obtener que

$$xE(1/x)\geqslant 1\geqslant xE(1/x)+x.$$

Resulta así que para $x<0$ es:

$$0\geqslant 1-xE(1/x)=f(0)-f(x)\geqslant x \quad \text{es decir} \quad 0\leqslant f(x)-f(0)\leqslant -x \tag{3}$$

De (2) y (3) deducimos que $|f(x)-f(0)|\leqslant|x|$. En consecuencia, dado $\varepsilon>0$, tomamos $\delta=\varepsilon$ con lo que, evidentemente, si $|x|<\delta$ entonces $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$. Luego f es continua en 0.

Nótese que ni la función parte entera ni la función U antes definida son continuas en cero y ello no impide que f sí lo sea.

El teorema de localización también puede usarse en este tipo de ejercicios. En nuestro caso, es evidente que para $x>1$ es $f(x)=0$ y para $x<-1$ es $f(x)=-x$. Por tanto la *restricción* de f a los intervalos $]1,+\infty[$ y $]-\infty,-1[$ es continua y, como estos intervalos son *abiertos*, deducimos por el teorema de localización que f es continua en dichos intervalos. De forma parecida podemos razonar con un intervalo del tipo $]1/(n+1),1/n[$ donde $n\in\mathbb{N}$ pues, para $x\in]1/(n+1),1/n[$ se tiene que $f(x)=nx$, luego la restricción de f a dicho intervalo es continua y, por tratarse de un intervalo *abierto*, deducimos que f es continua en $]1/(n+1),1/n[$. Análogamente se razona con un intervalo del tipo $]-1/n,-1/(n+1)[$. El teorema de localización no nos dice qué pasa en los puntos extremos de los intervalos considerados, es decir, en los puntos de la forma $1/n$ donde $n\in\mathbb{Z}^*$, y tampoco en 0. Esos puntos requieren, al igual que hicimos antes, un estudio particular.

27. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Para cada $x\in\mathbb{R}$ definamos la “distancia de x a A” por: $\operatorname{dist}(x,A)=\inf\{|x-a|:a\in A\}$. Pruébese que para todos $x,y\in\mathbb{R}$ se verifica que:

$$|\operatorname{dist}(x,A)-\operatorname{dist}(y,A)|\leqslant|x-y|$$

Dedúzcase que la aplicación $x\mapsto\operatorname{dist}(x,A)$ es continua.

Solución Teniendo en cuenta que $|a| \leqslant b$ equivale a que $a \leqslant b$ y $-a \leqslant b$, la desigualdad que nos piden probar equivale a estas dos desigualdades:

$$\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A) \leqslant |x-y| \quad \text{y} \quad \operatorname{dist}(y,A) - \operatorname{dist}(x,A) \leqslant |x-y| \tag{4}$$

Pero es claro que basta con probar una sola de ellas pues entonces cambiando x por y obtenemos la otra (porque $|x-y| = |y-x|$). Probaremos la primera de las dos desigualdades (4). Escribamos la desigualdad en la forma:

$$\operatorname{dist}(x,A) \leqslant |x-y| + \operatorname{dist}(y,A)$$

En todo lo que sigue x e y están fijos. Tenemos que para todo $a \in A$:

$$\operatorname{dist}(x,A) \leqslant |x-a| \leqslant |x-y| + |y-a|$$

es decir,

$$\operatorname{dist}(x,A) - |x-y| \leqslant |y-a| \quad \text{para todo} \quad a \in A$$

Deducimos que el número $\operatorname{dist}(x,A) - |x-y|$ es un minorante del conjunto $\{|y-a| : a \in A\}$, y por tanto será menor o igual que el máximo minorante de dicho conjunto, que es por definición $\operatorname{dist}(y,A)$. Hemos probado así que

$$\operatorname{dist}(x,A) - |x-y| \leqslant \operatorname{dist}(y,A)$$

Que es la desigualdad que queríamos probar.

Es evidente, teniendo en cuenta la desigualdad que acabamos de probar, que la función $\varphi(x) = \operatorname{dist}(x,A)$ es continua, pues dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ con lo que, evidentemente, si $|x-y| < \delta$ entonces $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |x-y| < \varepsilon$. Nótese que, aquí un mismo “δ” vale para todo punto y.

28. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, mayorada y tal que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se verifica que $\sup f(]a,b[) = \sup f(\mathbb{R})$. Pruébese que f es constante.

Solución Llamemos $\beta = \sup f(\mathbb{R})$. Es claro que $f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Y, si f es constante deberá darse la igualdad $f(x) = \beta$ en todo punto x de $\mathbb{R}$. Luego tenemos que probar que, dado $a \in \mathbb{R}$, es imposible que ocurra $f(a) < \beta$. Pero eso es claro, pues si fuera $f(a) < \beta$, entonces tomando $\lambda \in]f(a), \beta[$, por el teorema de conservación del signo aplicado a la función $g(x) = \lambda - f(x)$ en el punto a, deducimos que existe un intervalo abierto $]u,v[$ que contiene al punto a y tal que para todo $x \in]u,v[$ es $g(x) > 0$, es decir, $f(x) < \lambda$. Pero entonces $\sup f(]u,v[) \leqslant \lambda < \beta$ en contradicción con la hipótesis hecha.

29. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) < 0$, $f(b) < 0$ y $f(c) > 0$ para algún $c \in]a,b[$. Pruébese que hay dos números u, v tales que $a < u < v < b$, $f(u) = f(v) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in]u,v[$.

Solución Hay varias formas de hacer este ejercicio. Por ejemplo, podemos definir

$$u = \sup\{x \in]a,c[: f(x) = 0\}, \quad v = \inf\{x \in]c,b[: f(x) = 0\}$$

Con ello es fácil probar que $a < u < c < v < b$ y $f(u) = f(v) = 0$ pero f no puede anularse entre u y v, por lo que, al ser $f(c) > 0$, concluimos que $f(x) > 0$ para todo $x \in]u,v[$.

Vamos a ver ahora una propiedad interesante de las funciones continuas cuyas consecuencias son con frecuencia llamativas.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Llamemos al número $f(b) - f(a)$ el *incremento* de f en $[a,b]$. Dado un número natural $n \geqslant 2$, nos preguntamos si hay algún intervalo de longitud $(b-a)/n$ en el cual el incremento de f sea igual a $(f(b) - f(a))/n$. Para ello dividimos el intervalo $[a,b]$ en n intervalos de longitud igual a $(b-a)/n$. Estos intervalos son de la forma $[x_k, x_{k+1}]$, donde $x_k = a + k(b-a)/n$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Es claro que la suma de los incrementos de f en cada uno de los n intervalos $[x_k, x_{k+1}]$ es igual al incremento de f en el intervalo $[a,b]$. Es decir:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a).$$

Como en esta suma hay n sumando en total, deducimos que *o bien todos ellos son igual* a $(f(b) - f(a))/n$ o bien alguno de ellos es mayor que $(f(b) - f(a))/n$ en cuyo caso tiene que haber necesariamente otro que sea menor que $(f(b) - f(a))/n$.

Definamos la función $g : [a, b-(b-a)/n] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x+(b-a)/n) - f(x)$. Nótese que $g(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$. Según acabamos de ver:

- O bien para todo $k = 0,1,\ldots,n-1$ es $g(x_k) = \dfrac{f(b)-f(a)}{n}$, en cuyo caso se verifica que $f(x_{k+1}) - f(x_k) = \dfrac{f(b)-f(a)}{n}$,
- O bien hay puntos x_p, x_q tales que $g(x_p) < (f(b) - f(a))/n < g(x_q)$, en cuyo caso, como la función g es continua, el teorema de los ceros de Bolzano implica que tiene que haber algún punto t_o comprendido entre x_p y x_q tal que $g(t_o) = (f(b) - f(a))/n$, es decir se verifica que $f(t_o + (b-a)/n) - f(t_o) = (f(b) - f(a))/n$.

Hemos probado así que hay un intervalo de longitud $(b-a)/n$ en el cual el incremento de f es igual a $(f(b) - f(a))/n$.

30. Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo t_0. El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud períodos de 12 horas, es decir, pasadas 12 horas el reloj marca un tiempo $t_0 + 12$ horas. Demuéstrese que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.

Solución Sea $f\colon[0,12]\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(t)=$ tiempo (medido en horas) que marca el reloj en el tiempo t. Podemos admitir que f es continua. El incremento de f en el intervalo $[0,12]$ es igual a $f(12)-f(0)=12$. Deducimos, por lo antes visto que, para cada $n\geqslant 2$, hay algún intervalo de longitud $(12-0)/n$ en el cual el incremento de f es igual a $(f(12)-f(0))/n$. Es decir, que en algún instante c_o el reloj mide con exactitud un período de tiempo igual a $\frac{12}{n}$ horas: $f(c_o+12/n)-f(c_o)=12/n$. Tomando $n=12$ obtenemos la solución del ejercicio.

31. Un automovilista sale de Granada hacia Madrid un sábado a las 8h de la mañana y el domingo inicia el regreso a la misma hora. Sabiendo que invirtió igual tiempo en ambos viajes, pruébese que en algún momento del domingo el automovilista se encuentra a igual distancia de Granada que a la que se encontraba el sábado en ese mismo momento.

Solución Supongamos que el automovilista tarda 4 horas en llegar a Madrid. Llamando $f\colon[8,12]\to\mathbb{R}$ la función que en el tiempo t (medido horas) nos da la distancia $f(t)$ (medida en kilómetros) que el automovilista ha recorrido el sábado, y $g\colon[8,12]\to\mathbb{R}$ a la función que en el tiempo t (medido horas) nos da la distancia $g(t)$ (medida en kilómetros) que el automovilista ha recorrido el domingo; tenemos que $f(8)=g(8)=0$, $f(12)=g(12)=\alpha=$ distancia de Granada a Madrid.

Como las funciones f y g son continuas, la función $h(t)=f(t)-(\alpha-g(t))$ también es continua. Como $h(8)=-\alpha<0$, $h(12)=\alpha>0$, deducimos que $h(t_o)=0$ para algún $t_o\in[8,12]$, es decir $f(t_o)=\alpha-g(t_o)$. Por tanto, el sábado y el domingo, en el instante t_o el automovilista se encuentra a la misma distancia de Granada.

Si dibujas las gráficas de f y de g verás que este resultado es *evidente*.

32. Sea $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y decreciente. Pruébese que hay un único punto $a\in\mathbb{R}$ tal que $f(a)=a$.

Solución Naturalmente, se trata de probar que la función $g(x)=x-f(x)$ se anula en algún punto. Como es continua (porque nos dicen que f lo es) y está definida en un intervalo, intentaremos aplicar el teorema de Bolzano. Tomemos un punto $c\in\mathbb{R}$. Si $f(c)=c$ hemos acabado. En otro caso será $f(c)\neq c$. Supongamos que $f(c)<c$. Entonces, como f es decreciente, será $f(f(c))\geqslant f(c)$. Si $f(f(c))=f(c)$, hemos acabado. En otro caso será $f(f(c))>f(c)$. Pero en este caso obtenemos que $g(c)>0$ y $g(f(c))<0$ por lo que el teorema de Bolzano garantiza que g tiene que anularse en algún punto. Se razona de forma análoga si suponemos que $c<f(c)$.